Arithmétique musicale.

1722 fut une année charnière dans l'histoire de la musique théorique : la parution (mais non l'édition, qui ne viendra que beaucoup plus tard, en 1802 !!!???) du Premier Livre du Clavier bien tempéré de bach, la première version de l'Harmonie réduite à ses principes naturels de rameau et le premier convoi d'articles rédigés par Rousseau sur la musique dans le cadre de l'Encyclopédie de Diderot et d'Alembert.

Un point de l'histoire musicale mérité d'être rappelé à ce stade. Une œuvre, Le Clavier bien tempéré de J-S Bach, est traditionnellement évoquée comme point de départ de l'adoption du tempérament égal. Cette affirmation, pourtant 100 fois répétée, a fait l'objet de critiques sévères. Quel serait l'intérêt de passer son temps à écrire un prélude en do dièse majeur, ce qui représente 7 dièses en évidence à la clé, quand le même morceau peut être transposé un demi-ton plus bas (en do majeur, sans plus aucun dièse) et sonner pour ainsi dire de la même façon ? D'ailleurs des copies du manuscrits n'ont fatalement circulé qu'à partir de 1722, au plus tôt (date du Premier cahier) et le principe du tempérament égal ne s'est imposé qu'avec la Révolution française, fin de l'Ancien Régime, du clavecin et de son tempérament inégal (héritage du baroque). C'eut été l'occasion de mettre un peu d'ordre dans a nomenclature musicale, le vocabulaire, la notation et par-dessus tout l'enseignement de la musique mais cela ne s'est jamais concrétisé dans les faits. On aurait pu penser que l'Encyclopédie de Diderot et d'Alembert aurait pu servir de tremplin dans son vaste programme de rationalisation des connaissances de l'époque. Le chapitre sur la musique fut étrangement confié à Rousseau qui était certes amateur de musique mais aussi musicien amateur. Rousseau partait du constat qu'une rationalisation s'imposait mais il n'a pas réussi à convaincre ses pairs, à commencer par Rameau qui avait d'autres idées sur la question. En 1722 paraissent en effet deux essais l'un de Rousseau sur le principe d'une notation chiffrée de la musique et l'autre de Rameau qui aborde le problème de l'harmonie sur des bases arithmétiques solides.

Le sujet a été maintes fois abordé par des mathématiciens férus de musique, chacun mettant l'accent sur les points qui paraissaient les plus essentiels. Les musiciens n'ont jamais été saisis d'une fièvre similaire : outre que nombre d'entre eux sont fâchés avec les mathématiques depuis leur plus tendre enfance, ils ne voient pas l'intérêt du sujet. La plupart des grands musiciens ont en effet appris leur art très jeune et ils n'ont jamais souffert de l'accumulation des conventions tarabiscotées qui obscurcissent l'enseignement de la musique.

Cet enseignement n'a guère progressé depuis deux siècles au moins. Toutes les disciplines, en particulier scientifiques, ont procédé, à un moment de leur histoire, à une révision des concepts enseignés. Il est extrêmement difficile de lire, dans le texte original, les Principiae de Newton, les leçons d'électricité d'Ampère ou celles de thermodynamique de Carnot : c'est dans chaque cas un véritable salmigondis de concepts mal définis reliés par des raisonnements douteux. Il est extrêmement étonnant que la science ait pu progresser sur la base de prémices aussi mal formulées et on salue au passage l'œuvre simplificatrice opérée au début du 20ème siècle par quelques professionnels amateurs d'ordre.

La musique aurait dû suivre l'exemple mais elle ne l'a pas fait. Une première occasion lui a pourtant été offerte à l'occasion de l'édition de l'Encyclopédie de Diderot et d'Alembert, une vaste mise au point des connaissances acquises à l'époque. Le chapitre relatif à la musique avait bizarrement été confié à Rousseau qui n'était certes pas ignare en la matière mais dont ce n'était tout de même guère le métier; Rameau eut été de loin préférable. Notation chiffrée 1742 En trois mois de 1749, Rousseau en était déjà à plus de quatre cent articles !

Ces deux intervalles jouent un rôle essentiel du fait les notes concernées partagent les mêmes deux premiers harmoniques.

A vrai dire le sujet n'est guère abordé que par les mathématicines toujours surpris de l'état désordonné de la théorie actuelle

Les musiciens n'en ont cure qui ne voient pas le problème

Rousseau Encylopédie

Il existe beaucoup d'essais d'arithmétique musicale relative à la construction des modes et des gammes. L'un d'eux, paru chez Dunod dans la collection Science-Poche, en 1968, a retenu mon attention, il est dû à Pierre Barbaud. L'exemplaire que j'ai emprunté à la bibliothèque publique de la ville de Liège n'avait jamais été emprunté, c'est dire l'écho qu'il a pu susciter !

La plupart des musiciens ne se sentent pas concernés par l'incidence arithmétique sur l'art qu'ils pratiquent. Ils estiment avec quelques raisons qu'il n'en n'ont nul besoin, que les plus grands compositeurs n'en ont tiré aucun parti d'où ils ne voient pas pourquoi ils devraient s'en inquiéter. Ce serait ignorer la cohorte des apprentis musiciens qui ont tenté de s'y retrouver dans les arcanes d'un apprentissage musical parsemé d'étrangetés qu'aucune logique ne venait conforter et qui se sont découragés. Leur seul tort aura été de s'y être pris trop tard, au-delà de l'âge où l'on apprend tout n'importe comment sans se poser de questions.

L'arithmétique musicale leur aurait pourtant d'un grand secours suppléant l'intuition par la logique. Hélas la logique ne fait pas partie de l'enseignement musical pas plus qu'il ne fait partie de beaucoup d'autres disciplines tel le droit où l'on se mord la queue sans broncher.

La théorie musicale a fait un pas décisif en avant à l'époque de J-S Bach lorsqu'il a été établi que la meilleure partition de l'octave était en 12 parties égales. Cela résolvait complètement le problème de la transposition via l'addition modulo 12 sans trop compromettre la justesse. C'était un compromis mais un compromis acceptable et d'ailleurs accepté.

Cela dit cette simplification syntaxique ne s'est pas accompagnée d'une simplification sémantique et l'harmonie selon Rameau diffère radicalement de celle selon Schönberg. On pourrait dire que Schönberg a milité en faveur d'une simplification de l'orthographe musicale en usage depuis Rameau sans que les tenants de la musique dite classique lui ait jamais donné raison. Le problème est que la langue de Rameau ne s'accommode absolument pas de la simplification espérée. Cette histoire est compliquée et les musiciens n'ont jamais rien entrepris pour la simplifier, dès lors par respect pour tous les chefs-d'œuvre classiques que nous chérissons essayons d'y voir plus clair, sans indisposer les musiciens qui ont fait l'effort d'un apprentissage dans les règles et qui estiment à plus ou moins juste titre que les autres n'ont qu'à faire pareil.

L'arithmétique musicale n'est pas exactement celle qu'on enseigne à l'école élémentaire, celles des entiers en nombre infini (ensemble Z). Il s'agit plutôt de l'arithmétique modulaire des entiers appartenant à Z/12 = {0,1,2, …, 11}.

Il est bien connu que l'idée de partitionner l'octave en 12 parties égales repose sur une curiosité arithmétique du style, (3/2)12 que les musiciens traduisent en ce fait que 12 quintes valent approximativement 7 octaves (avec un écart de l'ordre du pourcent). La quinte importe en musique car elle rapproche les harmoniques de de deux notes.

Chaque chiffre correspond, en principe, à une note d'où il semblerait que chacune devrait recevoir un nom. C'est là que les choses se corsent car les noms retenus par l'usage révèlent d'emblée une étrangeté :

do (do# ou ré*b*) ré (ré# ou mi*b*) mi fa (fa# ou sol*b*) sol (sol# ou la*b*) la (la# ou si*b*) si

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11

7 noms sont effectivement retenus éventuellement flanqués d'une altération, # ou *b*.

5 notes qui correspondent pourtant à une seule touche sur un clavier de piano portent deux noms distincts; cette particularité porte le nom d'enharmonie.

Ces bizarreries ne sont pas là pour embêter les apprentis musiciens elles sont au service des interprètes désireux de jouer la musique s'appuyant sur le traité d'harmonie de Rameau.

Elles n'ont plus aucune raison d'être pour les lecteurs du traité d'Harmonie de Schönberg, qui met de fait les douze notes sur un strict pied d'égalité.

Selon que vous êtes ramiste ou schönbergien vous adopterez naturellement une attitude différente mais soyons objectif, à défaut d'être convaincus, on compte au moins 20 ramistes pour un schönbergien et comprenez que l'enseignement musical n'a guère évolué depuis 200 ans.

La tradition classique a de tous temps cultivé la compressibilité du texte musical notamment au travers de la modalité. Il s'agit d'une restriction volontaire de la gamme chromatique à 12 sons, Z/12, reposant tant qu'à faire sur des principes de consonance.

Il existe 212=4096 sous-ensembles des entiers modulaires, en comptant l'ensemble vide qui n'intéresse personne pas plus que les sous-ensembles à peu d'éléments. Chaque sous-ensemble définit un mode possible (je n'ai pas dit intéressant) soit une restriction de l'ensemble des notes chromatiques. Le mode le plus connu est incontestablement celui qui est défini par le sous-ensemble P0={0, 2, 4, 5, 7, 9, 11}, c'est le mode de do majeur, qui égrène les notes naturelles do, ré, mi, fa, sol, la, si.

Rien n'empêche de transposer ce mode, autrement dit de décaler chaque note d'un nombre fixé de demi-tons. On peut le faire de 12 manières différentes vers le haut, d'où on définit les modes majeurs : Px=P0+x (x=0, 1, …, 11). Les décaler vers le bas n'apporte rien de nouveau en raison du principe même de l'addition modulaire, z-k=z+12-k (mod 12).

Les notes communes à deux modes majeurs distincts s'obtiennent en calculant l'intersection des sous-ensembles correspondants :

P0P0={0, 2, 4, 5, 7, 9, 11} do M/do M

P0P1={0, 5} do M/do# M

P0P2={2, 4, 7, 9, 11} do M/ré M

P0P3={0, 2, 5, 7} do M/ré# M

P0P4={4, 9, 11} do M/mi M

P0P5={0, 2, 4, 5, 7, 9} do M/fa M

P0P6={5, 11} do M/fa# M

P0P7={0, 2, 4, 7, 9, 11} do M/sol M

P0P8={0, 5, 7} do M/sol# M

P0P9={2, 4, 9, 11} do M/la M

P0P10={0, 2, 5, 7, 9} do M/la# M

P0P11={4, 11} do M/si M

Une intersection peuplée signifie clairement que les deux tonalités partagent un grand nombre de notes tandis qu'à l'inverse une intersection presque vide réfère à des tonalités éloignées. Une musique classique module (= change de tonalité) habituellemnt en respectant une relation de voisinage préservant un maximum de notes communes.